

K.A. Stroud
Dexter J. Booth

MATEMATYKA
INŻYNIERSKA
POZIOM ZAAWANSOWANY

WYDANIE VI

Z języka angielskiego przełożył

Szymon Wąsowicz

Pętla

Tytuł oryginału: Advanced Engineering Mathematics (8th Edition)

Copyright © K.A. Stroud, Dexter Booth 2020

This translation of Advanced Engineering Mathematics, 6th edition is published by arrangement with Bloomsbury Publishing Plc.

Copyright © for the translation by Pętla Sp. z o.o. 2023

Copyright © for the Polish edition by Pętla Sp. z o.o. 2023

Wszystkie prawa zastrzeżone. Kopiowanie i rozpowszechnianie całości albo fragmentów tej książki – z wyjątkiem cytatów w artykułach i przeglądach krytycznych – możliwe jest tylko na podstawie pisemnej zgody właściciela praw autorskich.

REVIEW BOARD FOR THE SIXTH EDITION:

Declan Bates, Professor of Bioengineering, School of Engineering,
University of Warwick, UK

Stewart Chidlow, Senior Lecturer in Applied Mathematics, School of Applied
Mathematics, Liverpool John Moores University, UK

Patrick Johnson, Senior Lecturer in Mathematics, Department of Engineering
and Mathematics, Sheffield Hallam University, UK

Colin Steele, Director of Service Teaching, Department of Mathematics,
University of Manchester, UK

Tłumaczenie **Szymon Wąsowicz**

Redakcja **Agnieszka Jarosz**

Oprawa graficzna i skład **Marta Dobrzyńska**

ISBN 978-83-944283-3-4

Pętla Sp. z o.o.

<http://www.stroud.edu.pl/>

www.facebook.com/matematykastroud/

info@stroud.edu.pl

tel. 508 270 779



Skrócony spis treści

| | |
|---|-------------|
| <i>Przedmowa do pierwszego wydania</i> | <i>xxi</i> |
| <i>Przedmowa do szóstego wydania</i> | <i>xxii</i> |
| <i>Jak korzystać z tej książki</i> | <i>xxiv</i> |
| <i>Przydatne informacje</i> | <i>xxv</i> |
| 1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja | 1 |
| 2 Transformaty Laplace'a 1 | 43 |
| 3 Transformaty Laplace'a 2 | 85 |
| 4 Transformaty Laplace'a 3 | 112 |
| 5 Równania różnicowe i transformata Z | 140 |
| 6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych | 174 |
| 7 Szeregi Fouriera 1 | 213 |
| 8 Szeregi Fouriera 2 | 240 |
| 9 Wprowadzenie do transformat Fouriera | 266 |
| 10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1 | 299 |
| 11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2 | 318 |
| 12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3 | 333 |
| 13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych | 350 |
| 14 Algebra macierzy | 383 |
| 15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych | 421 |
| 16 Pola kierunków | 448 |
| 17 Analiza płaszczyzny fazowej | 472 |
| 18 Układy równań nieliniowych | 510 |
| 19 Układy dynamiczne | 528 |
| 20 Pochodne cząstkowe | 561 |
| 21 Równania różniczkowe cząstkowe | 598 |
| 22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych | 630 |
| 23 Całki funkcji wielu zmiennych 1 | 671 |
| 24 Całki funkcji wielu zmiennych 2 | 714 |
| 25 Funkcje określone przez całki | 750 |
| 26 Analiza wektorowa 1 | 781 |
| 27 Analiza wektorowa 2 | 821 |
| 28 Analiza wektorowa 3 | 865 |
| 29 Analiza zespolona 1 | 888 |
| 30 Analiza zespolona 2 | 921 |
| 31 Analiza zespolona 3 | 961 |
| 32 Optymalizacja i programowanie liniowe | 989 |
| <i>Dodatek</i> | <i>1011</i> |
| <i>Odpowiedzi</i> | <i>1019</i> |
| <i>Indeks</i> | <i>1055</i> |

Spis treści

| | |
|--|-------------|
| <i>Przedmowa do pierwszego wydania</i> | <i>xxi</i> |
| <i>Przedmowa do szóstego wydania</i> | <i>xxii</i> |
| <i>Jak korzystać z tej książki</i> | <i>xxiv</i> |
| <i>Przydatne informacje</i> | <i>xxv</i> |

Program 1 Numeryczne rozwiązywanie równań i interpolacja 1

| | |
|--|-----------|
| Czego się nauczę z tego programu? | 1 |
| Wprowadzenie | 2 |
| Zasadnicze twierdzenie algebry | 2 |
| Związki między współczynnikami a pierwiastkami równania wielomianowego | 4 |
| Równania sześciennne | 7 |
| Przekształcanie równania sześciennego do postaci zredukowanej | 7 |
| Metoda Tartaglii dla pierwiastka rzeczywistego | 8 |
| Metody numeryczne | 9 |
| Metoda połowienia | 9 |
| Numeryczne rozwiązywanie równań przez iterację | 11 |
| Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego | 11 |
| Adresy względne | 13 |
| Metoda iteracyjna Newtona-Raphsona | 13 |
| Tabelaryczne przedstawienie wyników | 15 |
| Zmodyfikowana metoda Newtona-Raphsona | 19 |
| Interpolacja | 22 |
| Interpolacja liniowa | 23 |
| Interpolacja graficzna | 23 |
| Wzór interpolacyjny Gregory'ego-Newtona z różnicami progresywnymi | 24 |
| Różnice centralne | 28 |
| Różnice wsteczne Gregory'ego-Newtona | 30 |
| Interpolacja Lagrange'a | 32 |
| Podsumowanie 1 | 35 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 1 | 37 |
| Zadania sprawdzające 1 | 38 |
| Dalsze wyzwania 1 | 39 |

Program 2 Transformaty Laplace'a 1 43

| | |
|--|-----------|
| Czego się nauczę z tego programu? | 43 |
| Wprowadzenie | 44 |
| Transformaty Laplace'a | 44 |
| Różniczkowanie i całkowanie transformat | 50 |
| Twierdzenie 1: Pierwsze twierdzenie o przesunięciu | 50 |
| Twierdzenie 2: Mnożenie przez t oraz t^n | 51 |
| Twierdzenie 3: Dzielenie przez t | 52 |
| Transformaty odwrotne | 56 |

| | |
|--|------------|
| Zasady rozkładu na ułamki proste | 57 |
| Metoda zakrywania | 62 |
| Tabela transformat odwrotnych | 63 |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych z zastosowaniem transformat Laplace'a | 64 |
| Transformaty pochodnych | 64 |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych pierwszego rzędu | 66 |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych drugiego rzędu | 68 |
| Układy równań różniczkowych | 74 |
| Podsumowanie 2 | 79 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 2 | 82 |
| Zadania sprawdzające 2 | 82 |
| Dalsze wyzwania 2 | 83 |
| Program 3 Transformaty Laplace'a 2 | 85 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 85 |
| Wprowadzenie | 86 |
| Funkcja skokowa Heaviside'a | 86 |
| Funkcja skokowa w zerze | 87 |
| Co daje zastosowanie funkcji skokowej? | 87 |
| Transformata Laplace'a funkcji $u(t - c)$ | 90 |
| Transformata Laplace'a funkcji $u(t - c) \cdot f(t - c)$ (drugie twierdzenie o przesunięciu) | 90 |
| Równania różniczkowe zawierające funkcje skokowe | 99 |
| Splot | 102 |
| Twierdzenie o splocie | 106 |
| Podsumowanie 3 | 108 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 3 | 109 |
| Zadania sprawdzające 3 | 109 |
| Dalsze wyzwania 3 | 110 |
| Program 4 Transformaty Laplace'a 3 | 112 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 112 |
| Transformaty Laplace'a funkcji okresowych | 113 |
| Funkcje okresowe | 113 |
| Transformaty odwrotne | 118 |
| Delta Diraca – impuls jednostkowy | 121 |
| Interpretacja graficzna | 122 |
| Transformata Laplace'a delty Diraca $\delta(t - a)$ | 123 |
| Pochodna funkcji skokowej Heaviside'a | 125 |
| Równania różniczkowe zawierające impuls jednostkowy | 126 |
| Oscylatory harmoniczne | 128 |
| Ruch drgający tłumiony | 130 |
| Ruch harmoniczny wymuszony z tłumieniem | 132 |
| Rezonans | 134 |
| Podsumowanie 4 | 136 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 4 | 137 |
| Zadania sprawdzające 4 | 138 |

| | |
|--|------------|
| Dalsze wyzwania 4 | 138 |
| Program 5 Równania różnicowe i transformata Z | 140 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 140 |
| Wprowadzenie | 141 |
| Ciągi | 142 |
| Równania różnicowe | 142 |
| Rozwiązywanie równań różnicowych | 144 |
| Rozwiązywanie przez ogład | 144 |
| Rozwiązanie szczególne | 147 |
| Transformata Z | 150 |
| Tabela transformat Z | 154 |
| Własności transformat Z | 154 |
| Liniowość | 154 |
| Pierwsze twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w lewo) | 155 |
| Drugie twierdzenie o przesunięciu (przesuwanie w prawo) | 156 |
| Skalowanie | 157 |
| Twierdzenie o wartości końcowej | 157 |
| Twierdzenie o wartości początkowej | 158 |
| Pochodna transformaty | 158 |
| Transformaty odwrotne | 159 |
| Rozwiązywanie równań różnicowych | 162 |
| Próbkowanie | 165 |
| Podsumowanie 5 | 167 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 5 | 169 |
| Zadania sprawdzające 5 | 170 |
| Dalsze wyzwania 5 | 171 |
| Program 6 Wprowadzenie do niezmienniczych układów liniowych | 174 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 174 |
| Liniowe układy niezmiennicze | 175 |
| Układy | 175 |
| Relacja typu wejście-odpowiedź | 176 |
| Układy liniowe | 177 |
| Niezmienniczość w czasie układu ciągłego | 179 |
| Niezmienniczość układu dyskretnego ze względu na przesunięcia | 181 |
| Równania różniczkowe | 182 |
| Ogólne równanie n -tego rzędu | 182 |
| Odpowiedź wejścia zerowego i odpowiedź stanu zerowego | 183 |
| Wejście zerowe, odpowiedź zerowa | 186 |
| Niezmienniczość w czasie | 188 |
| Odpowiedzi układu ciągłego | 189 |
| Odpowiedź impulsowa | 189 |
| Wejście dowolne | 189 |
| Splot | 190 |
| Odpowiedź wykładnicza | 192 |

| | |
|---|------------|
| Transmitancja operatorowa $H(s)$ | 194 |
| Równania różniczkowe | 196 |
| Odpowiedzi układu dyskretnego | 199 |
| Dyskretny impuls jednostkowy | 199 |
| Wejście dowolne | 200 |
| Odpowiedź wykładnicza | 201 |
| Transmitancja impulsowa | 202 |
| Równania różnicowe | 203 |
| Podsumowanie 6 | 206 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 6 | 208 |
| Zadania sprawdzające 6 | 210 |
| Dalsze wyzwania 6 | 210 |
| Program 7 Szeregi Fouriera 1 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 213 |
| Wprowadzenie | 214 |
| Funkcje okresowe | 214 |
| Wykresy funkcji postaci $y = A \sin nx$ | 214 |
| Harmoniki | 215 |
| Funkcje okresowe, które nie są sinusoidalne | 216 |
| Wyznaczanie wzorów analitycznych funkcji okresowych | 216 |
| Całki funkcji okresowych | 220 |
| Funkcje ortogonalne | 222 |
| Szeregi Fouriera | 223 |
| Warunki Dirichleta | 226 |
| Jak harmoniki wpływają na szereg Fouriera? | 231 |
| Efekt Gibbsa | 233 |
| Suma szeregu Fouriera w punkcie nieciągłości funkcji | 233 |
| Podsumowanie 7 | 234 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 7 | 235 |
| Zadania sprawdzające 7 | 236 |
| Dalsze wyzwania 7 | 237 |
| Program 8 Szeregi Fouriera 2 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 240 |
| Funkcje parzyste, funkcje nieparzyste i szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów | 241 |
| Funkcje parzyste i funkcje nieparzyste | 241 |
| Iloczyny funkcji parzystych i funkcji nieparzystych | 243 |
| Szeregi Fouriera według cosinusów oraz według sinusów | 250 |
| Szeregi zawierające tylko harmoniki o numerach parzystych lub tylko harmoniki o numerach nieparzystych. | 253 |
| Interpretacja wyrazu stałego $\frac{1}{2}a_0$ | 255 |
| Funkcje o okresach innych niż 2π | 256 |
| Funkcje o okresie T | 256 |
| Współczynniki Fouriera | 256 |

| | |
|---|------------|
| Szeregi według cosinusów oraz według sinusów dla funkcji o dowolnym okresie | 259 |
| Podsumowanie 8 | 262 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 8 | 263 |
| Zadania sprawdzające 8 | 264 |
| Dalsze wyzwania 8 | 264 |

Program 9 Wprowadzenie do transformat Fouriera 266

| | |
|---|------------|
| Czego się nauczę z tego programu? | 266 |
| Zespolone szeregi Fouriera | 267 |
| Wprowadzenie | 267 |
| Zespolone funkcje wykładnicze | 267 |
| Widma sygnału | 271 |
| Dwa sposoby opisu przebiegów okresowych | 272 |
| Widma ciągłe | 273 |
| Wzór całkowy Fouriera | 274 |
| Transformaty Fouriera ważniejszych funkcji | 276 |
| Funkcje parzyste | 276 |
| Funkcje nieparzyste | 277 |
| Funkcja prostokątna | 278 |
| Delta Diraca | 280 |
| Funkcja trójkątna | 281 |
| Postaci alternatywne | 282 |
| Własności transformat Fouriera | 282 |
| Liniowość | 282 |
| Przesunięcie w czasie | 283 |
| Przesunięcie w częstotliwości | 283 |
| Skalowanie czasu | 284 |
| Symetria | 284 |
| Różniczkowanie | 285 |
| Funkcja skokowa Heaviside'a | 286 |
| Splot | 287 |
| Twierdzenie o splocie | 288 |
| Cosinusowe i sinusowe transformaty Fouriera | 290 |
| Tabela transformat | 291 |
| Podsumowanie 9 | 292 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 9 | 295 |
| Zadania sprawdzające 9 | 296 |
| Dalsze wyzwania 9 | 296 |

Program 10 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 1 299

| | |
|---|------------|
| Czego się nauczę z tego programu? | 299 |
| Pochodne wyższych rzędów | 300 |
| Wzór Leibniza – pochodna n -tego rzędu iloczynu dwóch funkcji | 303 |
| Wybór funkcji u oraz v | 304 |

| | |
|--|------------|
| Rozwiązania w postaci szeregów potęgowych | 305 |
| Metoda Leibniza-Maclaurina | 306 |
| Równania liniowe Eulera | 311 |
| Podsumowanie 10 | 315 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 10 | 316 |
| Zadania sprawdzające 10 | 316 |
| Dalsze wyzwania 10 | 316 |
| Program 11 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 2 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 318 |
| Wprowadzenie | 319 |
| Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą Frobeniusa | 319 |
| Równanie indeksowe | 326 |
| Podsumowanie 11 | 331 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 11 | 331 |
| Zadania sprawdzające 11 | 332 |
| Dalsze wyzwania 11 | 332 |
| Program 12 Rozwiązania równań różniczkowych zwyczajnych w postaci szeregów potęgowych 3 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 333 |
| Wprowadzenie | 334 |
| Równanie Bessela | 334 |
| Funkcja gamma i funkcje Bessela | 335 |
| Wykresy funkcji Bessela $J_0(x)$ oraz $J_1(x)$ | 339 |
| Równanie Legendre'a | 339 |
| Wielomiany Legendre'a | 340 |
| Wzór Rodriguesa i funkcja tworząca | 340 |
| Zagadnienie Sturm-Liouville'a | 342 |
| Ortogonalność | 344 |
| Równanie Legendre'a raz jeszcze | 345 |
| Wielomiany jako kombinacje liniowe wielomianów Legendre'a | 345 |
| Podsumowanie 12 | 346 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 12 | 348 |
| Zadania sprawdzające 12 | 348 |
| Dalsze wyzwania 12 | 349 |
| Program 13 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych zwyczajnych | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 350 |
| Wprowadzenie | 351 |
| Szereg Taylora | 351 |
| Przyrost funkcji | 352 |
| Równania różniczkowe pierwszego rzędu | 352 |
| Metoda Eulera | 352 |

| | |
|--|------------|
| Wartości dokładne i błędy | 359 |
| Interpretacja graficzna metody Eulera | 362 |
| Metoda Eulera-Cauchy'ego, czyli ulepszona metoda Eulera | 364 |
| Obliczenia metodą Eulera-Cauchy'ego | 364 |
| Metoda Rungego-Kutty | 369 |
| Równania różniczkowe drugiego rzędu | 372 |
| Metoda Eulera drugiego rzędu | 372 |
| Metoda Rungego-Kutty dla równań różniczkowych drugiego rzędu | 374 |
| Metoda predyktor-korektor | 378 |
| Podsumowanie 13 | 380 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 13 | 381 |
| Zadania sprawdzające 13 | 382 |
| Dalsze wyzwania 13 | 382 |
| Program 14 Algebra macierzy | 384 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 384 |
| Macierze osobliwe i nieosobliwe | 385 |
| Rząd macierzy | 386 |
| Operacje elementarne i macierze równoważne | 387 |
| Zgodność układu równań liniowych | 390 |
| Jednoznaczność rozwiązania | 391 |
| Rozwiązywanie układów równań liniowych | 394 |
| Metoda macierzy odwrotnej | 394 |
| Metoda przekształcania wierszy | 397 |
| Metoda eliminacji niewiadomych Gaussa | 401 |
| Metoda rozkładu na iloczyn macierzy trójkątnych (rozkładu LU) | 403 |
| Zastosowanie arkusza kalkulacyjnego | 408 |
| Porównanie metod | 412 |
| Przekształcenia układów współrzędnych | 413 |
| Obrót układu współrzędnych | 414 |
| Podsumowanie 14 | 416 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 14 | 418 |
| Zadania sprawdzające 14 | 418 |
| Dalsze wyzwania 14 | 419 |
| Program 15 Układy równań różniczkowych zwyczajnych | 421 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 421 |
| Wartości własne macierzy 2×2 | 422 |
| Równania charakterystyczne | 422 |
| Suma i iloczyn wartości własnych | 423 |
| Wektory własne | 423 |
| Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu | 426 |
| Identyczne wartości własne | 430 |
| Diagonalizacja macierzy | 436 |
| Macierz modalna | 436 |
| Macierz spektralna | 436 |

| | |
|--|------------|
| Układy liniowych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu | 440 |
| Podsumowanie 15 | 444 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 15 | 445 |
| Zadania sprawdzające 15 | 446 |
| Dalsze wyzwania 15 | 446 |
| Program 16 Pola kierunków | 448 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 448 |
| Równania różniczkowe | 449 |
| Wprowadzenie | 449 |
| Rodzina rozwiązań szczególnych | 449 |
| Pola kierunków | 451 |
| Program DFIELD | 453 |
| Wprowadzenie | 453 |
| Rozwiązanie szczególne | 454 |
| Rodzina rozwiązań szczególnych | 455 |
| Autonomiczne równania różniczkowe | 456 |
| Rozwiązania równowagi | 457 |
| Linia fazowa | 459 |
| Równania nieautonomiczne | 464 |
| Wprowadzenie | 464 |
| Podsumowanie 16 | 468 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 16 | 469 |
| Zadania sprawdzające 16 | 469 |
| Dalsze wyzwania 16 | 470 |
| Program 17 Analiza płaszczyzny fazowej | 472 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 472 |
| Analiza płaszczyzny fazowej | 473 |
| Wprowadzenie | 473 |
| Wahadło sprężynowe | 473 |
| Program PPLANE | 475 |
| Analiza płaszczyzny fazowej | 478 |
| Wartości własne a płaszczyzna fazowa | 478 |
| Urojone wartości własne | 478 |
| Zespolone wartości własne | 483 |
| Co dzieje się wokół punktu krytycznego? | 486 |
| Dwie rzeczywiste ujemne wartości własne | 487 |
| Co dzieje się wokół punktu krytycznego? | 488 |
| Dwie rzeczywiste dodatnie wartości własne | 491 |
| Dwie rzeczywiste wartości własne różnych znaków | 494 |
| Dwie identyczne wartości własne | 497 |
| Węzeł gwiazdzisty | 498 |
| Osobliwa macierz współczynników | 499 |
| Niejednorodny układ równań | 500 |
| Przesunięcie punktu krytycznego do początku układu współrzędnych | 501 |

| | |
|--|------------|
| Podsumowanie 17 | 504 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 17 | 506 |
| Zadania sprawdzające 17 | 506 |
| Dalsze wyzwania 17 | 507 |
| Program 18 Układy równań nieliniowych | 510 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 510 |
| Układy równań różniczkowych z wieloma punktami krytycznymi | 511 |
| Wprowadzenie | 511 |
| Linearyzacja | 514 |
| Problemy z linearyzacją | 521 |
| Podsumowanie 18 | 525 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 18 | 525 |
| Zadania sprawdzające 18 | 526 |
| Dalsze wyzwania 18 | 526 |
| Program 19 Układy dynamiczne | 528 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 528 |
| Układy dynamiczne | 529 |
| Wprowadzenie | 529 |
| Zagadnienia typu drapieżnik-ofiara | 529 |
| Współzawodnictwo w pojedynczej populacji | 531 |
| Dwie populacje bez wzajemnych interakcji | 532 |
| Dwie populacje z wzajemnymi interakcjami | 534 |
| Równania różniczkowe drugiego rzędu | 540 |
| Wahadło nietłumione – małe odchylenia | 540 |
| Wahadło nietłumione – brak aproksymacji | 541 |
| Wahadło tłumione | 543 |
| Bifurkacja | 546 |
| Równania pierwszego rzędu | 546 |
| Równania drugiego rzędu | 550 |
| Cykle graniczne | 551 |
| Równanie van der Pola | 553 |
| Podsumowanie 19 | 555 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 19 | 555 |
| Zadania sprawdzające 19 | 556 |
| Dalsze wyzwania 19 | 556 |
| Program 20 Pochodne cząstkowe | 561 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 561 |
| Małe przyrosty | 562 |
| Wzór Taylora dla funkcji jednej zmiennej rzeczywistej | 562 |
| Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych | 562 |
| Małe przyrosty | 563 |
| Tempo zmiany wartości funkcji | 565 |
| Funkcje uwikłane | 566 |

| | |
|---|------------|
| Zamiana zmiennych | 566 |
| Funkcje odwrotne | 570 |
| Przypadek ogólny | 572 |
| Punkty stacjonarne funkcji dwóch zmiennych | 577 |
| Maksima i minima lokalne | 578 |
| Punkt siodłowy | 583 |
| Metoda współczynników nieoznaczonych Lagrange'a | 588 |
| Funkcje trzech zmiennych rzeczywistych | 590 |
| Podsumowanie 20 | 593 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 20 | 594 |
| Zadania sprawdzające 20 | 595 |
| Dalsze wyzwania 20 | 596 |
| Program 21 Równania różniczkowe cząstkowe | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 598 |
| Wprowadzenie | 599 |
| Równania różniczkowe cząstkowe | 599 |
| Rozwiązywanie przez bezpośrednie całkowanie | 599 |
| Warunki początkowe i warunki brzegowe | 601 |
| Równanie struny | 602 |
| Rozwiązanie równania struny | 602 |
| Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych | 602 |
| Równanie przewodnictwa cieplnego dla jednorodnego pręta ograniczonego | 610 |
| Rozwiązanie równania przewodnictwa cieplnego | 611 |
| Równanie Laplace'a | 615 |
| Rozwiązanie równania Laplace'a | 615 |
| Równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych | 619 |
| Problem | 620 |
| Rozdzielenie zmiennych | 620 |
| Przypadek $n = 0$ | 623 |
| Podsumowanie 21 | 625 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 21 | 626 |
| Zadania sprawdzające 21 | 627 |
| Dalsze wyzwania 21 | 628 |
| Program 22 Numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 630 |
| Wprowadzenie | 631 |
| Numeryczna aproksymacja pochodnych | 631 |
| Funkcje dwóch zmiennych rzeczywistych | 633 |
| Wartości w punktach siatki | 634 |
| Gwiazdy różnicowe | 636 |
| Podsumowanie metody | 639 |
| Warunki brzegowe zawierające pochodne cząstkowe | 642 |
| Równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu | 646 |

| | |
|---|------------|
| Równania eliptyczne | 646 |
| Równania hiperboliczne | 646 |
| Równania paraboliczne | 646 |
| Pochodne cząstkowe drugiego rzędu | 648 |
| Równania zależne od czasu | 651 |
| Metoda Cranka-Nicolsona | 656 |
| Analiza wymiarowa | 661 |
| Podsumowanie 22 | 662 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 22 | 664 |
| Zadania sprawdzające 22 | 665 |
| Dalsze wyzwania 22 | 666 |
| Program 23 Całki funkcji wielu zmiennych 1 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 671 |
| Wprowadzenie | 672 |
| Różniczki | 678 |
| Różniczka zupełna | 680 |
| Całkowanie różniczek zupełnych | 682 |
| Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi | 683 |
| Całki krzywoliniowe skierowane | 687 |
| Alternatywna postać całki krzywoliniowej skierowanej | 687 |
| Własności całek krzywoliniowych skierowanych | 690 |
| Obszary ograniczone krzywymi zamkniętymi | 692 |
| Całki krzywoliniowe skierowane wzdłuż krzywych zamkniętych | 692 |
| Całki krzywoliniowe nieskierowane | 696 |
| Krzywe określone równaniami parametrycznymi | 697 |
| Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania | 698 |
| Różniczka zupełna funkcji trzech zmiennych | 702 |
| Twierdzenie Greena | 703 |
| Podsumowanie 23 | 709 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 23 | 711 |
| Zadania sprawdzające 23 | 712 |
| Dalsze wyzwania 23 | 712 |
| Program 24 Całki funkcji wielu zmiennych 2 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 714 |
| Całki podwójne | 715 |
| Całka powierzchniowa nieorientowana | 719 |
| Układy współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej | 724 |
| Współrzędne kartezjańskie | 724 |
| Współrzędne walcowe | 724 |
| Współrzędne sferyczne | 725 |
| Element objętości w trzech rodzajach współrzędnych | 727 |
| Całki potrójne | 728 |
| Zamiana zmiennych w całkach wielokrotnych | 735 |

| | |
|---|------------|
| Współrzędne krzywoliniowe | 737 |
| Zamiana zmiennych w trzech wymiarach | 743 |
| Podsumowanie 24 | 744 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 24 | 747 |
| Zadania sprawdzające 24 | 747 |
| Dalsze wyzwania 24 | 748 |
| Program 25 Funkcje określone przez całki | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 750 |
| Funkcje gamma oraz beta | 751 |
| Funkcja gamma | 751 |
| Funkcja beta | 758 |
| Wzory rekurencyjne | 759 |
| Związek pomiędzy funkcjami gamma i beta | 761 |
| Zastosowania funkcji gamma oraz beta | 763 |
| Wzór Legendre'a o podwajaniu | 765 |
| Funkcja błędu | 766 |
| Wykres funkcji $\operatorname{erf}(x)$ | 767 |
| Uzupełniająca funkcja błędu $\operatorname{erf}(x)$ | 767 |
| Funkcje eliptyczne | 769 |
| Standardowe postaci funkcji eliptycznych | 769 |
| Całki eliptyczne zupełne | 770 |
| Alternatywne postaci funkcji eliptycznych | 773 |
| Podsumowanie 25 | 776 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 25 | 777 |
| Zadania sprawdzające 25 | 778 |
| Dalsze wyzwania 25 | 779 |
| Program 26 Analiza wektorowa 1 | |
| Czego się nauczę z tego programu? | 781 |
| Wprowadzenie | 782 |
| Iloczyny potrójne | 786 |
| Iloczyn skalarny trzech wektorów (iloczyn mieszany) | 786 |
| Własności iloczynu mieszanego | 787 |
| Wektory komplanarne | 788 |
| Potrójne iloczyny wektorowe | 789 |
| Różniczkowanie wektorów | 793 |
| Różniczkowanie sum i iloczynów wektorów | 796 |
| Jednostkowy wektory styczny | 797 |
| Pochodne cząstkowe funkcji wektorowej | 799 |
| Całkowanie funkcji wektorowych | 800 |
| Pola skalarne i wektorowe | 801 |
| Gradient funkcji skalarnej | 802 |
| Pochodne kierunkowe | 804 |
| Jednostkowy wektory normalny | 807 |
| Gradienty sumy i iloczynu funkcji skalarnych | 808 |

| | |
|--|------------|
| Dywergencja funkcji wektorowej | 810 |
| Rotacja funkcji wektorowej | 810 |
| Podsumowanie wiadomości o gradiencie, dywergencji i rotacji | 812 |
| Złożenia operatorów gradientu, dywergencji i rotacji | 813 |
| Podsumowanie 26 | 815 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 26 | 817 |
| Zadania sprawdzające 26 | 818 |
| Dalsze wyzwania 26 | 819 |
| Program 27 Analiza wektorowa 2 | 821 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 821 |
| Całki krzywoliniowe | 822 |
| Pole skalarne | 822 |
| Pole wektorowe | 824 |
| Całki potrójne | 828 |
| Całki powierzchniowe | 832 |
| Pole skalarne | 832 |
| Pole wektorowe | 835 |
| Zachowawcze pola wektorowe | 839 |
| Wzór Gaussa-Ostrogradskiego | 843 |
| Wzór Stokesa | 849 |
| Zwrot jednostkowego wektora normalnego do powierzchni S a obieg na ograniczającej ją krzywej c | 851 |
| Twierdzenie Greena | 856 |
| Podsumowanie 27 | 859 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 27 | 861 |
| Zadania sprawdzające 27 | 862 |
| Dalsze wyzwania 27 | 862 |
| Program 28 Analiza wektorowa 3 | 865 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 865 |
| Współrzędne krzywoliniowe | 866 |
| Ortogonalne współrzędne krzywoliniowe | 869 |
| Ortogonalne układy współrzędnych w przestrzeni | 870 |
| Współczynniki skali | 873 |
| Współczynniki skali dla współrzędnych kartezyjskich, walcowych i sferycznych | 874 |
| Dowolne układy współrzędnych krzywoliniowych (u, v, w) | 876 |
| Równania przejścia | 877 |
| Element łuku ds oraz element objętości dV w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych | 877 |
| Gradient, dywergencja, rotacja i laplasjan w układzie ortogonalnych współrzędnych krzywoliniowych | 878 |
| Gradient, dywergencja i laplasjan we współrzędnych kartezyjskich, walcowych i sferycznych | 881 |

| | |
|---|------------|
| Podsumowanie 28 | 883 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 28 | 885 |
| Zadania sprawdzające 28 | 886 |
| Dalsze wyzwania 28 | 886 |
| Program 29 Analiza zespolona 1 | 888 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 888 |
| Funkcje zmiennej zespolonej | 889 |
| Odwzorowanie zespolone | 890 |
| Wyznaczanie obrazu linii prostej leżącej na płaszczyźnie w odwzorowaniu $w = f(z)$ | 891 |
| Typy odwzorowań postaci $w = az + b$ | 895 |
| Odwzorowania nieliniowe | 902 |
| Wyznaczanie obrazów obszarów | 906 |
| Podsumowanie 29 | 917 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 29 | 918 |
| Zadania sprawdzające 29 | 918 |
| Dalsze wyzwania 29 | 919 |
| Program 30 Analiza zespolona 2 | 921 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 921 |
| Różniczkowanie funkcji zmiennej zespolonej | 922 |
| Funkcja analityczna | 923 |
| Równania Cauchy'ego-Riemanna | 925 |
| Funkcje harmoniczne | 926 |
| Całkowanie funkcji zespolonych | 930 |
| Całki po konturach, czyli całki krzywoliniowe na płaszczyźnie z Twierdzenie Cauchy'ego | 930 |
| Deformacja konturu w punkcie osobliwym | 933 |
| Odwzorowania konforemne | 937 |
| Warunki konforemności odwzorowania | 943 |
| Punkty krytyczne | 944 |
| Odwzorowanie Schwarza-Christoffela | 944 |
| Wielokąty otwarte | 947 |
| Podsumowanie 30 | 951 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 30 | 956 |
| Zadania sprawdzające 30 | 958 |
| Dalsze wyzwania 30 | 959 |
| Program 31 Analiza zespolona 3 | 961 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 961 |
| Szeregi Maclaurina | 962 |
| Promień zbieżności | 965 |
| Punkty osobliwe | 966 |
| Bieguny | 966 |

| | |
|--|-------------|
| Punkty pozornie osobliwe | 967 |
| Koło zbieżności | 967 |
| Szereg Taylora | 968 |
| Szereg Laurenta | 969 |
| Residua | 973 |
| Obliczanie residuów | 975 |
| Całki funkcji rzeczywistych | 976 |
| Całki postaci $\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$ | 977 |
| Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$ | 978 |
| Całki postaci $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{cases} \sin x \\ \cos x \end{cases} dx$ | 980 |
| Podsumowanie 31 | 982 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 31 | 985 |
| Zadania sprawdzające 31 | 986 |
| Dalsze wyzwania 31 | 987 |
| Program 32 Optymalizacja i programowanie liniowe | 989 |
| Czego się nauczę z tego programu? | 989 |
| Optymalizacja | 990 |
| Programowanie liniowe (optymalizacja liniowa) | 990 |
| Nierówności liniowe | 990 |
| Graficzna reprezentacja nierówności liniowych | 991 |
| Solver | 996 |
| Parametry Solvera | 997 |
| Zastosowania | 1001 |
| Programowanie nieliniowe | 1003 |
| Podsumowanie 32 | 1005 |
| Czy potrafisz? Lista kontrolna 32 | 1006 |
| Zadania sprawdzające 32 | 1006 |
| Dalsze wyzwania 32 | 1007 |
| <i>Dodatek</i> | 1011 |
| <i>Odpowiedzi</i> | 1019 |
| <i>Indeks</i> | 1055 |

